

Geometriefaktoren von Hohlraumresonatoren zur Elektronendichte-, Dichteprofil- und Stoßfrequenzmessung von Plasmen

G. JANZEN

Institut für Gasentladungstechnik und Photoelektronik der Universität Stuttgart

(Z. Naturforsch. 26 a, 1264—1271 [1971]; eingegangen am 9. März 1971)

Geometry factors of cavity resonators for the determination of plasma electron density, density profile, and collision frequency

Geometry factors of a number of cylindrical TE_{lmn} and TM_{lmn} cavity resonance modes are calculated as a function of the ratio of plasma and cavity radius and as a function of the radial electron density profile. In axial direction homogeneous and sinusoidal density profiles are assumed.

Resonance modes with a small index l are suitable for the measurement of electron densities in narrow and dilute plasma columns; modes with an index $l \geq 2$ are specially advantageous for measuring the density profile.

Results of measurements of the electron density, density profile, and collision frequency in nitrogen are given.

Die Bestimmung der mittleren Elektronendichte \bar{n}_e und des Dichteprofils $n_e(r)$ eines Plasmas sowie der Stoßfrequenz ν zwischen Elektronen und anderen Plasmateilchen kann aus der Resonanzfrequenzverstimmung und Güteänderung eines Mikrowellen-Hohlraumresonators erfolgen¹⁻⁴.

Die exakte Theorie des Hohlraumresonators^{5, 6} beschreibt den Zusammenhang zwischen der Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ und der mittleren Elektronendichte \bar{n}_e für beliebig dichte Plasmen. Ist die Elektronendichte $n_e \ll n_c$ (n_c cut-off-Dichte), so lässt sich in einer linearen Störungstheorie des Hohlraumresonators^{7, 8} ein linearer Zusammenhang zwischen der Frequenzverschiebung und der Elektronendichte angeben. Die Proportionalitätskonstante zwischen den normierten Größen der Frequenzverschiebung und der Dichte wird im folgenden als Geometriefaktor Φ bezeichnet.

Es gilt

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = \Phi \frac{\bar{n}_e}{n_c} \frac{1}{1 + (\nu/\omega)^2}. \quad (1)$$

Dabei ist ω die Meßfrequenz und

$$n_c = \omega^2 (\epsilon_0 m_e / e^2) \quad (2)$$

Sonderdruckanforderungen an Dr. G. JANZEN, Institut für Plasmaforschung, Universität Stuttgart, D-7000 Stuttgart 80, Pfaffenwaldring 31.

- ¹ M. A. BIONDI u. S. C. BROWN, Phys. Rev. **75**, 1700 [1949].
- ² S. C. BROWN, Proc. 2. Conf. Peaceful Uses Atomic Energy, Geneva 1958, UN.
- ³ G. JANZEN, Z. Naturforsch. **24 a**, 1496 [1969].

(ϵ_0 absolute Dielektrizitätskonstante, m_e Elektronenmasse, e Elementarladung).

Der Geometriefaktor Φ ist im allgemeisten Fall abhängig vom Resonanzmodus, vom radialem und axialen Elektronendichteprofil $n_e(r, z)$ und vom Füllgrad R_p/R_r , wenn R_p der Plasmaradius und R_r der Resonatorradius ist.

1. Grundgleichungen zur Berechnung der Geometriefaktoren

Nach der Störungstheorie folgt für den Geometriefaktor

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{n}_e} \frac{\int n_e(r, z) E^2(r, \varphi, z) dV}{\int E^2(r, \varphi, z) dV}, \quad (3)$$

wobei das Integral im Zähler über das gesamte Plasmavolumen V_p innerhalb des Resonators zu berechnen ist. Im Nenner ist das Quadrat der elektrischen Mikrowellen-Feldstärkeverteilung $E(r, \varphi, z)$ über das Resonatorvolumen V_r zu integrieren.

Weist die Elektronendichte n_e nur eine radiale und axiale, aber keine azimutale Abhängigkeit auf, so lässt sich schreiben

⁴ G. JANZEN, Z. Angew. Physik **31**, 296 [1971].

⁵ B. AGDUR u. B. ENANDER, J. Appl. Phys. **33**, 575 [1962].

⁶ J. L. SHOHET u. C. MOSKOWITZ, J. Appl. Phys. **36**, 1756 [1965].

⁷ J. MÜLLER, Hochfrequenz und Elektroakustik **54**, 157 [1939].

⁸ J. C. SLATER, Rev. Mod. Phys. **18**, 441 [1946].



$$n_e(r, z) = n_0 f_n(r) f_n(z), \quad (4)$$

wobei $f_n(r)$ bzw. $f_n(z)$ die r - bzw. z -abhängigen Funktionsanteile der Dichtevertteilung beschreiben. n_0 ist die Elektronendichte in der z -Achse bei $z = L_r/2$ (L_r Resonatorlänge). Als radiales Dichteprofil $f_n(r)$ wurden das Bessel- J_0 -Profil

$$f_n(r) = J_0(2,405 r/R_p) \quad (5)$$

und Parabelprofile der Form

$$f_n(r) = 1 - s(r/R_p)^2 \quad (6)$$

verwendet³. In axialer Richtung wurde

$$f_n(z) = 1 \quad (7)$$

für gerade, offene Entladungsgefäße angenommen und

$$f_n(z) = \sin(\pi z/L_r) \quad (8)$$

für vollständig im Resonator eingeschlossene, zylindrische Entladungsgefäße.

Die Frequenzverschiebung $\Delta\omega$ nach Gl. (1) folgt aus der räumlich gemittelten Elektronendichte; daher ist die Achsmittendichte n_0 in Gl. (4) in eine mittlere Dichte umzurechnen.

Für das Profil nach Gl. (5) folgt für den Mittelwert

$$\bar{f}_{nrB} = 0,432 \quad (9)$$

und für die Parabelprofile

$$\begin{aligned} \bar{f}_{nrP} &= 1 - s/2 \quad \text{für} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ &\quad 0 \leq r \leq R_p; \\ \bar{f}_{nrP} &= 1/2 s \quad \text{für} \quad 1 \leq s < \infty, \\ &\quad 0 \leq r \leq R_p \sqrt{s}. \end{aligned} \quad (10)$$

Die gleiche Mittelung erfolgt über das z -Profil. Aus Gl. (7) folgt

$$\bar{f}_{nz(hom)} = 1 \quad (11)$$

und aus Gl. (8)

$$\bar{f}_{nz(sin)} = 0,637. \quad (12)$$

Es gilt damit für die Dichte n_0 in der Achse

$$n_0 = \bar{n}_e / \bar{f}_{nr} \bar{f}_{nz}. \quad (13)$$

Das elektrische Mikrowellenfeld E im Resonator lässt sich in vielen Fällen in der Form

$$E = E_0 f_E(r) f_E(\varphi) f_E(z) \quad (14)$$

schreiben. Damit folgt durch Einsetzen der Gln. (4) und (13) in Gl. (3) *

* Aus satztechnischen Gründen mußte in den Gln. (15) und (16) statt f_E^2 die Anordnung f_E^2 gesetzt werden.

⁹ C. G. MONTGOMERY, Technique of Microwave Measurements, MIT Rad. Lab. Ser. 11, McGraw-Hill, New York 1947.

¹⁰ J. P. KINZER u. I. G. WILSON, Bell Syst. Techn. J. 26, 410 [1947].

$$\Phi(r, \varphi, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{f}_{nr}} \cdot \frac{\int_{r=0}^{R_p'} f_n(r) f_E^2(r) r dr}{\int_{r=0}^{R_r} f_E^2(r) r dr} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &\cdot \frac{\int_{\varphi=0}^{2\pi} f_E^2(\varphi) d\varphi}{\int_{\varphi=0}^{2\pi} f_E^2(\varphi) d\varphi} \cdot \frac{1}{\bar{f}_{nz}} \cdot \frac{\int_{z=0}^{L_r} f_n(z) f_E^2(z) dz}{\int_{z=0}^{L_r} f_E^2(z) dz} \\ &= F(r) F(\varphi) G(z). \end{aligned} \quad (16)$$

Bei kontrahierten Profilen [$s > 1$, Gl. (6)] stimmen Plasma- und Behälterradius nicht mehr überein. Als obere Integrationsgrenze ist dann für Parabelprofile mit $s > 1$ $r = R_p' = R_p/\sqrt{s}$ zu wählen. Für Profilparameter $s \leq 1$ ist $R_p' = R_p$.

Der Azimutanteil $F(\varphi) \equiv 1$ führt auf den Geometriefaktor

$$\Phi(r, z) = F(r) G(z). \quad (17)$$

2. Berechnung der Geometriefaktoren $\Phi(r, z)$ für TE-Resonanzen

Setzt man in Gl. (15) die Beziehung für die elektrische Feldstärke kreiszylindrischer TE_{lmn}-Resonatoren ein^{9, 10}, so erhält man nach Trennung der radialen und axialen Funktionsanteile des Geometriefaktors Φ

$$F_{TE}(r) = \frac{1}{2} \frac{1}{\bar{f}_{nr}} \frac{\int_{r=0}^{R_p'} f_n(r) \left[l^2 \frac{J_l^2(k_1' r)}{(k_1' r)^2} + J_l'^2(k_1' r) \right] r dr}{\int_{r=0}^{R_r} \left[l^2 \frac{J_l^2(k_1' r)}{(k_1' r)^2} + J_l'^2(k_1' r) \right] r dr}, \quad (18)$$

$$G_{TE}(z) = \frac{1}{\bar{f}_{nz}} \cdot \frac{\int_{z=0}^{L_r} f_n(z) \sin^2(n \pi z/L_r) dz}{\int_{z=0}^{L_r} \sin^2(n \pi z/L_r) dz}, \quad (19)$$

wobei $k_1' = \alpha_{lm}'/R_r$ ist und α_{lm}' die m -te Nullstelle der Bessel-Funktion J_l' ist.

Für eine homogene Elektronendichteverteilung über der z -Achse erhält man den axialen Geometriefaktor

$$G_{TE(hom)} = 1. \quad (20)$$

Ist das Entladungsgefäß völlig im Resonator eingeschlossen, so gilt Gl. (8), woraus folgt

$$G_{TE(sin)} = 4 n^2 / (4 n^2 - 1). \quad (21)$$

Die Geometriefaktoren F für die Resonanzmoden TE_{11n}, TE_{21n}, TE_{31n} wurden numerisch berechnet;

sie sind in den Abb. 1 bis 3 als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r wiedergegeben. Parameter ist in dieser Darstellung das radiale Elektronendichtheprofil; der Parameter s der Gl. (6) ist dabei zwischen $s=0$ und $s=2$ verändert. Die gestrichelt gezeichneten Kurven gehören zum Bessel- J_0 -Profil.

$$\Phi_{\text{TM}}(r, z) = \frac{1}{2} \frac{1}{f_{nz}} \frac{1}{f_{nz}} \frac{R_p'}{R_r} \frac{\int_{r=0}^{R_p'} f_n(r) \left(\frac{n \pi}{L_r} \right)^2 \left[l^2 \frac{J_l^2(k_1 r)}{(k_1 r)^2} + J_l'^2(k_1 r) \right] r dr \cdot \int_{z=0}^{L_r} f_n(z) \sin^2 \left(\frac{n \pi z}{L_r} \right) dz + \int_{r=0}^{R_p'} f_n(r) k_1^2 J_l^2(k_1 r) r dr \cdot \int_{z=0}^{L_r} f_n(z) \cos^2 \left(\frac{n \pi z}{L_r} \right) dz}{\int_{r=0}^{R_r} \left(\frac{n \pi}{L_r} \right)^2 \left[l^2 \frac{J_l^2(k_1 r)}{(k_1 r)^2} + J_l'^2(k_1 r) \right] r dr \cdot \int_{z=0}^{L_r} \sin^2 \left(\frac{n \pi z}{L_r} \right) dz + \int_{r=0}^{R_r} k_1^2 J_l^2(k_1 r) r dr \cdot \int_{z=0}^{L_r} \cos^2 \left(\frac{n \pi z}{L_r} \right) dz} \quad (22)$$

Dabei ist $k_1 = \alpha_{lm}/R_r$, mit α_{lm} als der m -ten Nullstelle der Bessel-Funktion J_l .

Bei homogener DichteVerteilung über der z -Achse [Gl. (7)] ergeben sich die in Abb. 4 und 5 dargestellten Geometriefaktoren $\Phi_{\text{TM(hom)}}$ für die Resonanzmoden

TM_{021} ($R_r/L_r = 0,5$) und TM_{211} ($R_r/L_r = 0,6$).

Ist das Profil in z -Richtung sinusförmig, so gelten die in den Abb. 6 und 7 für die Moden TM_{011}

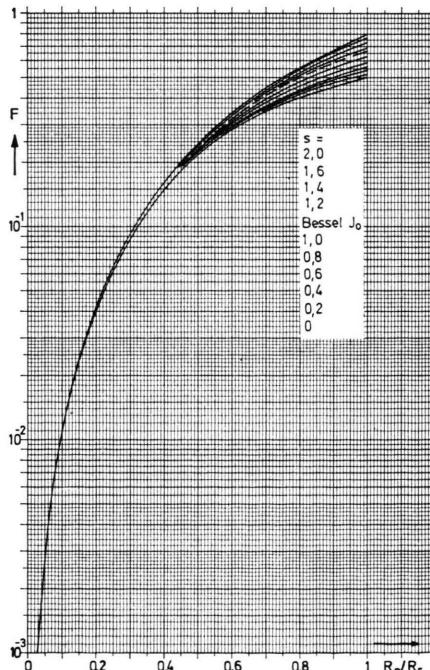


Abb. 1. Geometriefaktor F für den Resonanzmodus TE_{11n} als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r . Parameter ist das Elektronendichtheprofil.

3. Berechnung der Geometriefaktoren $\Phi(r, z)$ für TM-Resonanzen

Bei der Bestimmung der Geometriefaktoren für TM_{lmn} -Resonanzmoden lassen sich die axialen und radialen Funktionsanteile im allgemeinen nicht trennen. Es ergibt sich für den Geometriefaktor

($R_r/L_r = 0,6$) und TM_{021} ($R_r/L_r = 0,5$) wiedergegebenen Geometriefaktoren $\Phi_{\text{TM(sin)}}$. Abbildung 8 zeigt den Geometriefaktor Φ als Funktion des Ra-

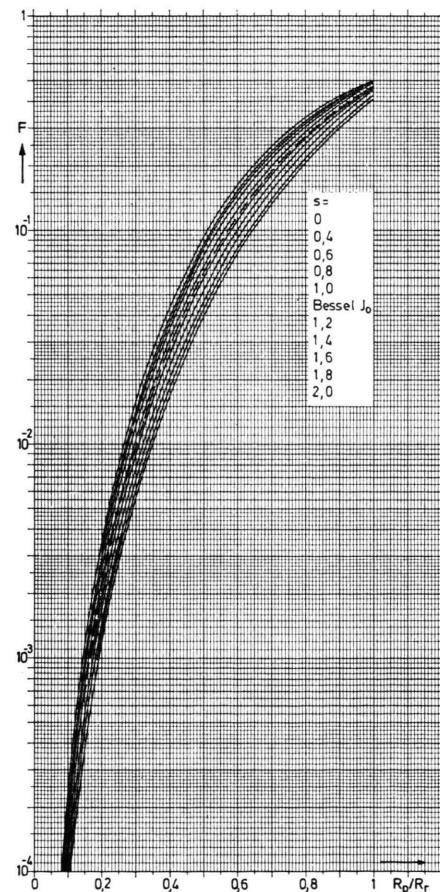


Abb. 2. Geometriefaktor F für den Resonanzmodus TE_{21n} als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r . Parameter ist das Elektronendichtheprofil.

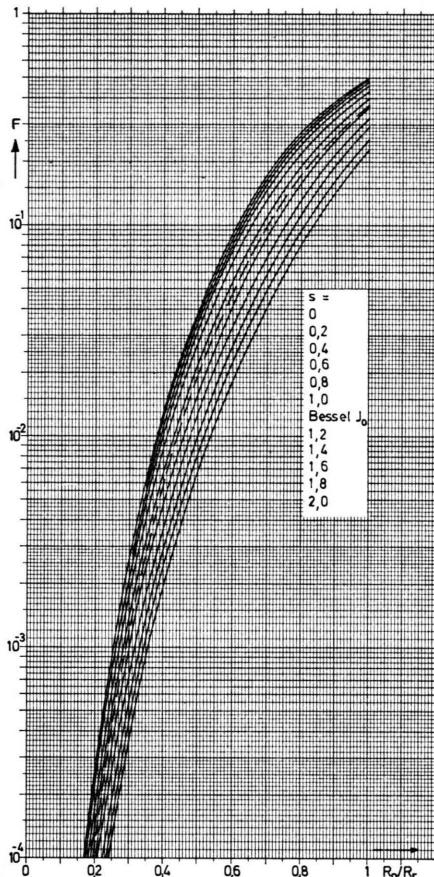


Abb. 3. Geometriefaktor F für den Resonanzmodus TE_{31n} als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r . Parameter ist das Elektronendichteprofil.

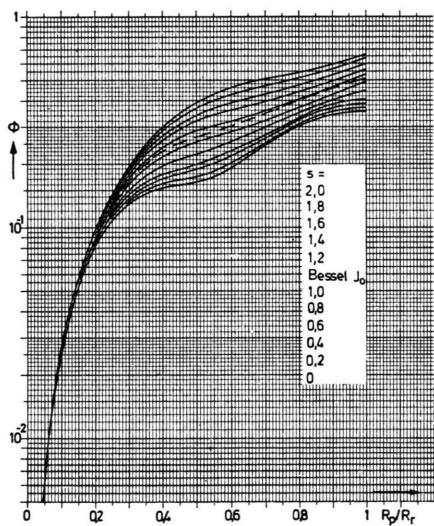


Abb. 4. Geometriefaktor Φ für den Resonanzmodus TM_{021} ($R_r/L_r=0.5$) als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r bei homogener Dichtevertteilung über der z -Achse. Parameter ist das Elektronendichteprofil.

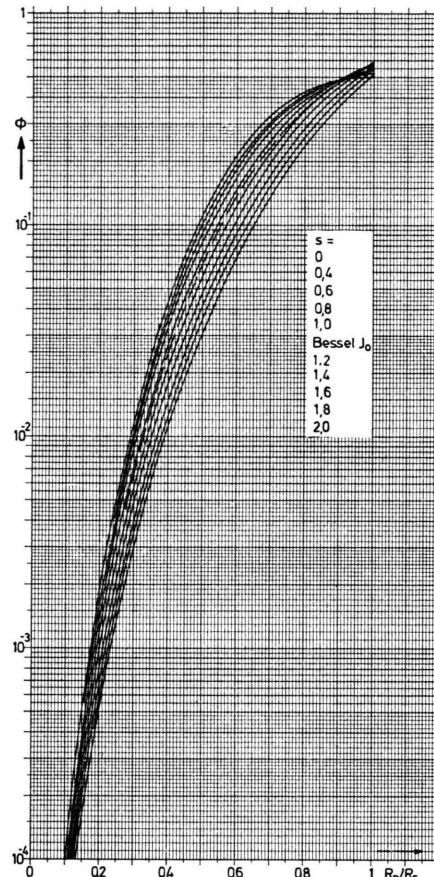


Abb. 5. Geometriefaktor Φ für den Resonanzmodus TM_{211} ($R_r/L_r=0.6$) als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r bei homogener Dichtevertteilung über der z -Achse. Parameter ist das Elektronendichteprofil.

dienverhältnisses R_p/R_r für den Resonanzmodus TM_{111} bei rechteckiger Dichtevertteilung über dem Radius ($s=0$) und homogener bzw. sinusförmiger Dichtevertteilung über der z -Achse des Entladungsgefäßes. Weiterer Parameter ist das Verhältnis Resonatorradius zu Resonatorlänge R_r/L_r . Für TM_{lm0} -Resonanzmoden lässt sich allgemein angeben¹¹

$$\Phi_{TM\,lm0(\sin)} = 2 \Phi_{TM\,lm0(hom)}. \quad (23)$$

In den Abb. 9 bis 12 sind für fünf verschiedene Radienverhältnisse R_p/R_r ($0,05; 0,15; 0,3; 0,6; 1,0$) die Geometriefaktoren F bzw. Φ einer Vielzahl von Resonanzmoden als Funktion des Profilparameters s angegeben. Aus dieser Darstellung ist zu entnehmen, wie stark die Abhängigkeit vom radialen Elektronendichteprofil ist: bei kleinen Füllgraden R_p/R_r kann hiernach eine große Zahl von Resonanz-

¹¹ G. JANZEN, Dissertation, Universität Stuttgart 1971.

moden zu genauen Dichtemessungen auch ohne Kenntnis des Dichteprofils herangezogen werden. Resonanzmoden mit großem l -Index sind für Elek-

tronendichtheitsprofilmessungen³ besonders geeignet. Der Unterschied der Meßempfindlichkeit der verschiedenen Moden kann (bei konstantem Verhältnis R_p/R_r) einige Größenordnungen betragen.

Ganz allgemein sind Moden mit kleinem l -Index zur Messung kleiner Plasmalelektronendichten geeignet, während Moden mit einem Index $l \geq 2$ erst für dichtere Plasmen eine meßbare Frequenzverschiebung erfahren.

4. Meßergebnisse

Die Bestimmung der mittleren Elektronendichte \bar{n}_e , der Stoßfrequenz ν und des Elektronendichtheitsprofils $n_e(r)$ erfolgte an einem Stickstoff-Gasentladungsplasma.

In einer Reflexionsanordnung wurden dazu die Resonanzkurven eines Mikrowellen-Hohlraumresonators, der koaxial das Entladungsgefäß enthielt, aufgenommen und ausgewertet.

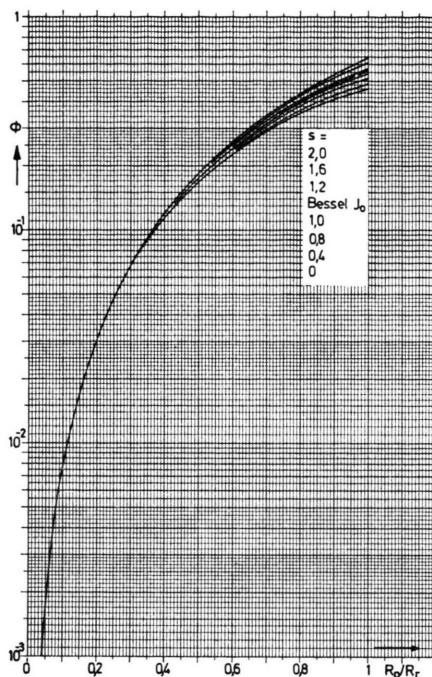


Abb. 6. Geometriefaktor $\bar{\Phi}$ für den Resonanzmodus TM_{011} ($R_r/L_r = 0,6$) als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r bei sinusförmiger DichteVerteilung über der z -Achse. Parameter ist das Elektronendichtheitsprofil.

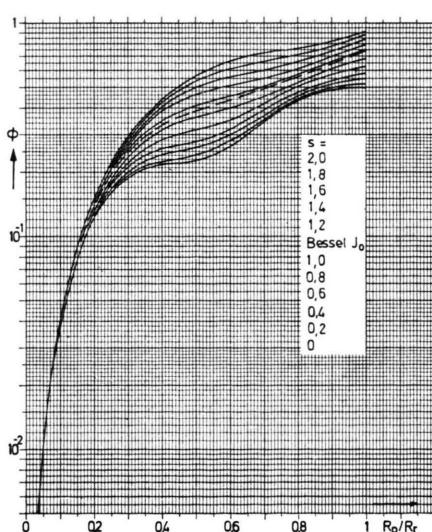


Abb. 7. Geometriefaktor $\bar{\Phi}$ für den Resonanzmodus TM_{021} ($R_r/L_r = 0,5$) als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r bei sinusförmiger DichteVerteilung über der z -Achse. Parameter ist das Elektronendichtheitsprofil.

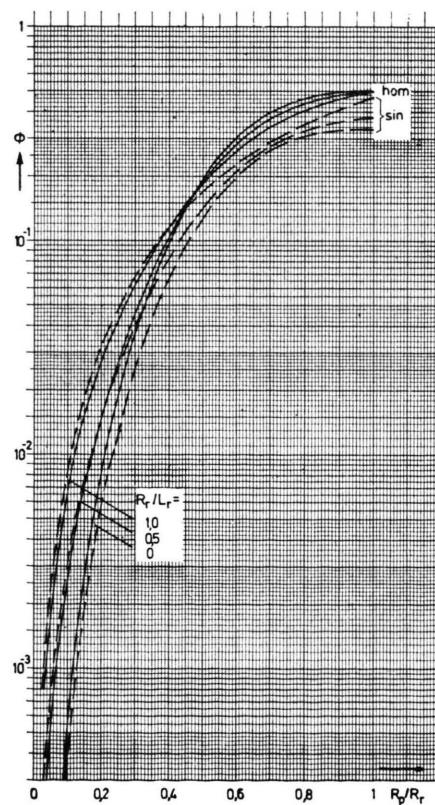


Abb. 8. Geometriefaktor $\bar{\Phi}_{(hom)}$ und $\bar{\Phi}_{(sin)}$ als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r für den Resonanzmodus TM_{111} bei rechteckiger DichteVerteilung über dem Radius; Parameter sind das axiale Dichtheitsprofil und das Verhältnis R_r/L_r .

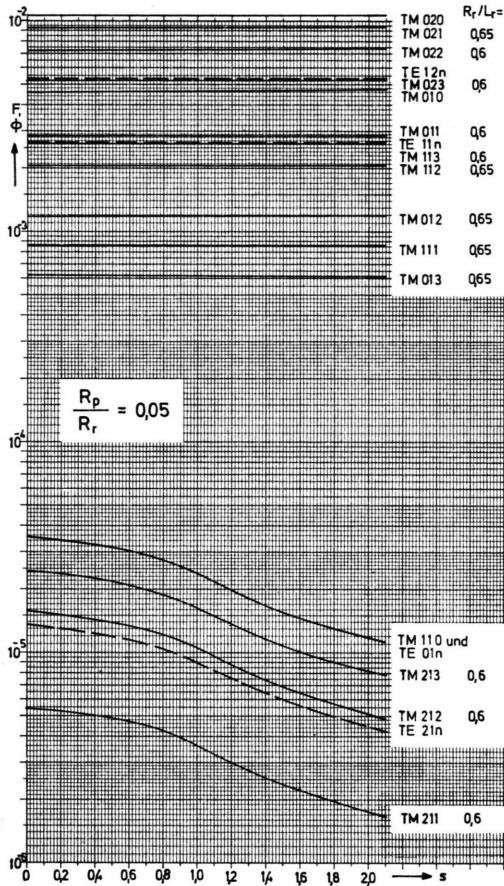


Abb. 9. Geometriefaktor Φ bzw. F als Funktion des radialen Elektronendichtheiprofils für das Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,05$.

Die Frequenzverschiebungen unter dem Einfluß eines Plasmas wurden als Funktion des Entladungsstromes I in den Resonanzmoden TM_{020} , TE_{011} und TE_{211} gemessen.

Aus den Diagrammen Abb. 3 und Abb. 5 in ³ und Abb. 2 dieser Arbeit wurden die Geometriefaktoren Φ bzw. F für das vorliegende Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,28$ für alle Profilwerte s entnommen.

Da die mittlere Dichte \bar{n}_e vom radialen Elektronendichtheiprofil abhängig ist, muß vor der Dichtebestimmung der Profilparameter s bestimmt werden. Dies geschieht durch Messung der Frequenzverschiebung in zwei Resonanzmoden am identischen Plasma und anschließender Bildung des Wertes

$$V_{\text{ex}} = (\Delta\omega_1/\Delta\omega_2) \cdot (\omega_{01}/\omega_{02}), \quad (24)$$

wobei $\Delta\omega_1$ die bei der Resonanzfrequenz ω_{01} gemessene Frequenzverschiebung im Resonanzmodus 1

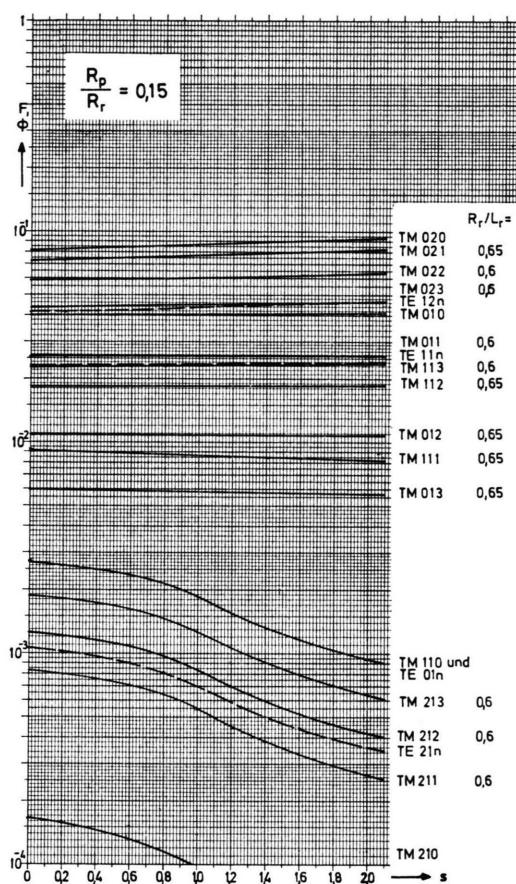


Abb. 10. Geometriefaktor Φ bzw. F als Funktion des radialen Elektronendichtheiprofils für das Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,15$.

und $\Delta\omega_2$ die Frequenzverschiebung bei der Resonanzfrequenz ω_{02} des Modus 2 ist.

Der nach Gl. (24) experimentell bestimmte Wert V_{ex} wird mit einem theoretischen Wert V_{th} verglichen, der sich aus dem Quotienten der Geometriefaktoren Φ_1 und Φ_2 der beiden Resonanzmoden 1 und 2 für jeden Profilparameter $s = s_0$ bilden läßt:

$$V_{\text{th}} = \Phi_1(s_0)/\Phi_2(s_0). \quad (25)$$

Derjenige Wert $s = s_0$, der die Bedingung

$$V_{\text{th}} = V_{\text{ex}} \quad (26)$$

erfüllt, stellt den gesuchten Profilparameter dar ^{3, 11}.

Zur Vereinfachung des beschriebenen Verfahrens sind in ^{3, 12} die Quotienten V_{th} als Funktion des Radienverhältnisses R_p/R_r direkt angegeben.

¹² G. JANZEN, Bericht IPF-71-5, Institut f. Plasmaforschung, Universität Stuttgart.

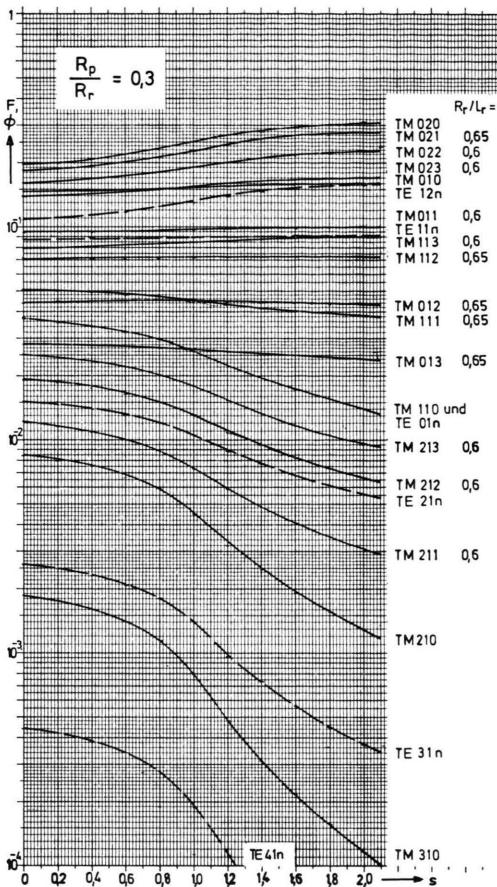


Abb. 11. Geometriefaktor Φ bzw. F als Funktion des radialen Elektronendichtheprofils für das Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,3$.

Mit der Kenntnis des Profilparameters s lässt sich nach Gl. (1) die mittlere Elektronendichte \bar{n}_e und nach

$$\frac{\nu}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{\Delta(1/Q)}{(\Delta\omega/\omega)} \quad (27)$$

die normierte Stoßfrequenz bestimmen³.

Für die Änderung des reziproken Gütwertes Q gilt $\Delta(1/Q) = 1/Q_1 - 1/Q_0 \approx (\delta\omega_1 - \delta\omega_0)/\omega$. (28)

Q_0 bzw. $\delta\omega_0$ ist die Güte bzw. Halbwertbreite des unbelasteten Resonators, Q_1 bzw. $\delta\omega_1$ die Güte bzw. Halbwertbreite des mit einem Plasma belasteten Resonators.

Abbildung 13 zeigt das Elektronendichtheprofil als Funktion des Entladungsstromes I in Stickstoff. Die Messungen erfolgten in den Resonanzmodenpaaren TM_{020}/TE_{011} und TE_{011}/TE_{211} . Meßergebnisse einer radial verschiebbaren Langmuir-Sonde sind zur Bestätigung des Mikrowellen-Verfahrens

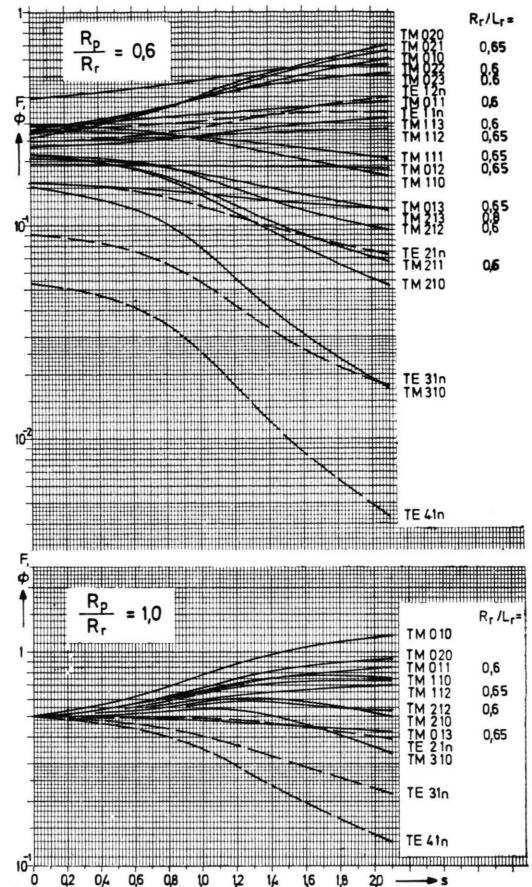


Abb. 12. Geometriefaktor Φ bzw. F als Funktion des radialen Elektronendichtheprofils für das Radienverhältnis $R_p/R_r = 0,6$ und $1,0$.

mit eingetragen. $s = 0$ entspricht einer Rechteckverteilung, $s = 1$ einer Parabelverteilung, $s \approx 1,05$ näherungsweise einer Bessel-Verteilung J_0 . — In Abb. 14 ist die mittlere Elektronendichte \bar{n}_e und die Stoßfrequenz ν als Funktion des Entladungsstromes I für ein Stickstoffplasma mit dem Neutralgasdruck $p = 0,07$ Torr aufgetragen.

Zusammenfassung

Für eine Vielzahl kreiszylindrischer TE_{lmn} - und TM_{lmn} -Resonatoren werden die Geometriefaktoren als Funktion des Radienverhältnisses Plasma/Resonator und als Funktion des radialen Elektronendichtheprofils berechnet. In axialer Richtung ist ein homogenes bzw. ein sinusförmiges Dichteprofil zu grunde gelegt.

Mit Hilfe der angegebenen Geometriefaktoren ist die Bestimmung des Absolutwerts der Elektronen-

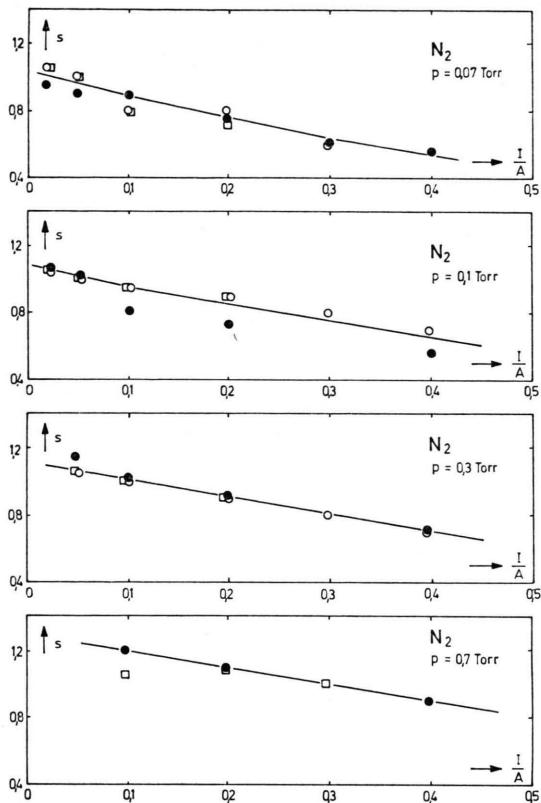


Abb. 13. Elektronendichte-Profilparameter s als Funktion des Entladungsstroms I eines Stickstoff-Gasentladungsplasmas. Parameter ist der Neutralgasdruck p . \square TM₀₂₀/TE₀₁₁, \circ TE₀₁₁/TE₂₁₁, \bullet Langmuir-Sondenmessung.

dichte und Stoßfrequenz eines Plasmas aus einer einzigen Messung und die Bestimmung des Elektronendichteprofils aus der Messung in zwei Resonanzmoden möglich.

Resonanzmoden mit kleinem l -Index sind zur Elektronendichtebestimmung in dünnen Plasma-

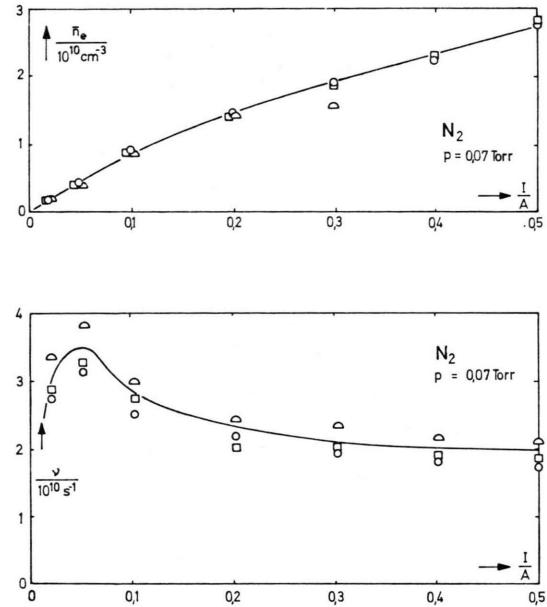


Abb. 14. Mittlere Elektronendichte \bar{n}_e und Stoßfrequenz $\bar{\nu}$ als Funktion des Entladungsstroms I eines Stickstoff-Gasentladungsplasmas. Neutralgasdruck $p = 0,07$ Torr. Die Messungen erfolgten in den Resonanzmoden TM₀₂₀ (\circ) bei 11,246 GHz, TE₂₁₁ (\square) bei 8,444 GHz, TE₀₁₁ (\square) bei 8,412 GHz.

säulen geeignet, Moden mit dem Index $l \geq 2$ sind für Profilbestimmungen besonders geeignet.

Ergebnisse von Messungen der mittleren Elektronendichte, des Dichteprofils sowie der Elektron-Neutralteilchen-Stoßfrequenz werden angegeben.

Herrn Prof. Dr. W. KLUGE danke ich für sein Interesse an dieser Arbeit. Frau SCHWAN vom Institut für Plasmaforschung bin ich für ihre Unterstützung bei der numerischen Berechnung der Integrale zu Dank verpflichtet.